

Radosław DEBAŁA, Agnieszka SOŁTYSIAK

## **MARKOWSKI MODEL PROCESU EKSPLOATACJI CIĄGNIKÓW ROLNICZYCH**

**Streszczenie:** Efektywna i racjonalna analiza złożonych procesów eksploatacji obiektów technicznych wymaga zastosowania różnego rodzaju metod modelowania, w tym modeli matematycznych i symulacyjnych. W badaniach do opisu rzeczywistego procesu eksploatacji ciągników rolniczych opracowano zdarzeniowy model procesu eksploatacji, a następnie zbudowano model matematyczny z zastosowaniem teorii procesów Markowa. Na podstawie otrzymanych wyników dokonano analizy rozpatrywanego procesu eksploatacji obiektów technicznych.

**Słowa kluczowe:** proces eksploatacji, procesy Markowa, ciągniki rolnicze

### **1. WPROWADZENIE**

Ciągniki rolnicze przystosowane są do wykonywania wielu zróżnicowanych zadań. Zastosowanie nowoczesnych rozwiązań w układach hydraulicznych umożliwia współpracę z maszynami towarzyszącymi. W wielu przypadkach ciągnik rolniczy jako źródło energii mechanicznej odpowiednio zagregowany z osprzętem lub maszyną towarzyszącą zastępuje wiele innych maszyn użytkowanych w różnych gałęziach gospodarki.

Efektywność eksploatacji obiektów technicznych określana jest jako stopień spełniania wymagań niezawodnościowych, jakościowych, ekonomicznych i innych, w określonym czasie, w stosunku do poniesionych nakładów [5]. Dla zapewnienia wysokiej efektywności działania systemów eksploatacji obiektów technicznych, np. ciągników rolniczych konieczne jest sterowanie procesami eksploatacji w sposób racjonalny [6]. Racjonalne sterowanie systemami eksploatacji obiektów technicznych możliwe jest na podstawie rzetelnej analizy i oceny realizowanych procesów eksploatacji. W tym celu stosowane są różnego rodzaju modele i narzędzia matematyczne ułatwiające analizę i ocenę realizowanych procesów eksploatacji, a w konsekwencji proces podejmowania decyzji sterujących, np. markowskie i semi-markowskie modele procesu oraz modele decyzyjne [1, 2, 4, 7]. W badaniach do analizy procesu eksploatacji ciągników rolniczych opracowano matematyczny model tego procesu – model Markowa.

---

<sup>1</sup> mgr inż. Radosław DEBAŁA, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy,  
e-mail: raddeb002@utp.edu.pl

<sup>2</sup> mgr inż. Agnieszka SOŁTYSIAK, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy,  
Zakład Eksploatacji i Transportu, Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-789 Bydgoszcz,  
e-mail: agnieszka.soltysiak@utp.edu.pl

## 2. OPIS OBIEKTU BADAŃ

Badania eksploatacyjne zostały przeprowadzone na podstawie rzeczywistego systemu eksploatacji obiektów technicznych, którymi są ciągniki rolnicze. W zakresie działalności badanego systemu eksploatacji znajdują się następujące zadania:

- przygotowanie obszarów rolnych pod siew nasion,
- siew nasion roślin uprawnych na wskazanej przez zleceniodawcę powierzchni,
- prowadzenie zabiegów agrotechnicznych na wskazanych uprawach,
- zbiór płodów rolnych,
- transport płodów rolnych do magazynów znajdujących się na terenie gospodarstwa zleceniodawcy.

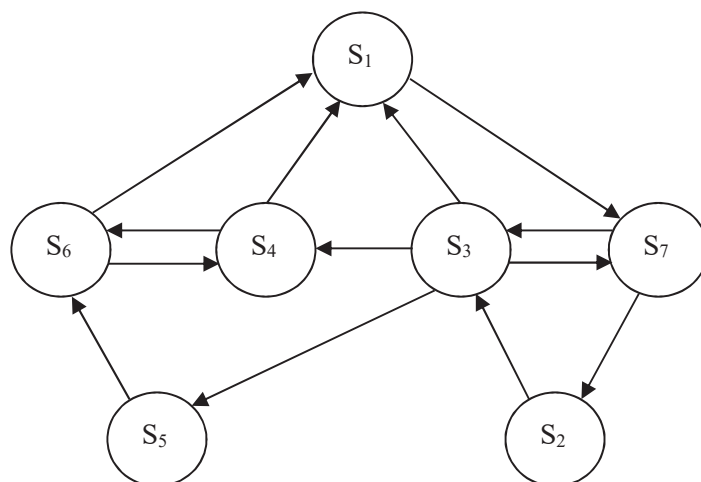
Obiektami technicznymi użytkowymi w badanym systemie eksploatacji są ciągniki rolnicze wyprodukowane w latach 2011–2012. W badanym systemie używanych jest 6 ciągników rolniczych tego samego typu. Dane techniczne ciągnika rolniczego zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Dane techniczne ciągnika rolniczego  
Table 1. Technical data of the agricultural tractor

|                                             |                       |
|---------------------------------------------|-----------------------|
| pojemność silnika (cm <sup>3</sup> )        | 6728                  |
| moc znamionowa (kW/KM)                      | 168/228               |
| prędkość minimalna (km·h <sup>-1</sup> )    | 0,03                  |
| prędkość maksymalna (km·h <sup>-1</sup> )   | 50                    |
| promień skrętu (mm)                         | 6100                  |
| masa pojazdu (kg)                           | 7300                  |
| długość całkowita (mm)                      | 5733                  |
| szerokość minimalna (mm)                    | 2470                  |
| wysokość od środka osi tylnej do dachu (mm) | 2140                  |
| wysokość całkowita (mm)                     | 3165                  |
| rozstaw osi (mm)                            | 2884                  |
| rozstaw kół (mm)                            | min. 1806 / max. 2236 |
| prześwit (mm)                               | 523                   |

## 3. MODEL ZDARZENIOWY PROCESU EKSPLOATACJI

Model zdarzeniowy procesu eksploatacji został zbudowany na podstawie analizy przestrzeni stanów oraz zdarzeń eksploatacyjnych dotyczących obiektów technicznych, którymi są ciągniki rolnicze eksploatowane w analizowanym rzeczywistym systemie. W wyniku identyfikacji procesu eksploatacji obiektów technicznych, wyznaczono istotne stany eksploatacyjne tego procesu oraz możliwe przejścia między wyróżnionymi stanami. Na tej podstawie zbudowano graf zmian stanów procesu eksploatacji, przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Graf skierowany odwzorowania procesu eksploatacji ciągników rolniczych: S<sub>1</sub> – postój obiektu technicznego, S<sub>2</sub> – realizacja obsługi w dniu użytkowania, S<sub>3</sub> – użytkowanie, S<sub>4</sub> – realizacja obsługi technicznej, S<sub>5</sub> – diagnozowanie, S<sub>6</sub> – naprawa, S<sub>7</sub> – zmiana osprzętu (przezbieranie)

Fig. 1. A directed graph depicting operation and maintenance process of agricultural tractors: S<sub>1</sub> – stopover, S<sub>2</sub> – service on the day of use, S<sub>3</sub> – carrying out of task, S<sub>4</sub> – carrying out of technical service, S<sub>5</sub> – diagnosis, S<sub>6</sub> – repair, S<sub>7</sub> – change of accessories (retooling)

#### 4. MODEL MATEMATYCZNY PROCESU EKSPLOATACJI

Mając na uwadze cel opracowania, dokładność odwzorowania rozpatrywanego procesu eksploatacji obiektów technicznych (ciągników rolniczych) oraz możliwość pozyskania danych eksploatacyjnych, w pracy do budowy matematycznego modelu procesu eksploatacji zastosowano jednorodny proces Markowa  $X(t)$  [3].

W wyniku identyfikacji procesu eksploatacji ciągników rolniczych wyznaczono możliwe zmiany wyróżnionych stanów eksploatacyjnych. Założono, że łańcuch utworzony z kodów kolejnych stanów eksploatacyjnych jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Prawdopodobieństwa zmiany stanów eksploatacyjnych wyznaczono zakładając, że każdemu łukowi grafu (rys. 1), łączącemu dwa stany odpowiada wartość prawdopodobieństwa  $p_{ij}$  zmiany stanu  $S_i$  do  $S_j$  w czasie obserwacji  $T$ , według wzorów.

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 7, \quad i \neq j \quad (1)$$

$$p_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (2)$$

gdzie:

$n_{ij}$  – liczba zmian stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$  w czasie obserwacji  $T$ ,  
 $n_i$  – sumaryczna liczba wyjść ze stanu  $S_i$  w czasie  $T$ .

#### 4.1. Wyznaczenie prawdopodobieństw granicznych dla łańcucha Markowa

Na podstawie grafu skierowanego odwzorowania procesu eksploatacji została wyznaczona macierz  $P$  prawdopodobieństw zmian stanów dla łańcucha Markowa.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17} \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & p_{35} & 0 & p_{37} \\ p_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{56} & 0 \\ p_{61} & 0 & 0 & p_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{72} & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństw granicznych  $\pi_i$ ,  $i=1,2,\dots,7$ , włożonego w proces łańcucha Markowa został zbudowany układ równań.

$$P^T \cdot \Pi = \Pi \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17} \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & p_{35} & 0 & p_{37} \\ p_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{56} & 0 \\ p_{61} & 0 & 0 & p_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{72} & p_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Następnie układ równań (5) został zastąpiony układem równań liniowych.

$$\sum_{i=1}^7 p_{ij} \cdot \pi_i = \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, 7 \quad (6)$$

czyli:

$$\begin{cases} p_{31} \cdot \pi_3 + p_{41} \cdot \pi_4 + p_{61} \cdot \pi_6 = \pi_1 \\ p_{72} \cdot \pi_7 = \pi_2 \\ p_{23} \cdot \pi_2 + p_{73} \cdot \pi_7 = \pi_3 \\ p_{34} \cdot \pi_3 + p_{64} \cdot \pi_6 = \pi_4 \\ p_{35} \cdot \pi_3 = \pi_5 \\ p_{46} \cdot \pi_4 + p_{56} \cdot \pi_5 = \pi_6 \\ p_{17} \cdot \pi_1 + p_{37} \cdot \pi_3 = \pi_7 \end{cases} \quad (7)$$

W celu rozwiązania układu równań liniowych (7), jedno z równań układu, np. równanie pierwsze, zostało zastąpione warunkiem normalizacyjnym postaci

$$\sum_{i=1}^7 \pi_i = 1 \quad (8)$$

Wówczas układ równań liniowych (7) przedstawiono poniżej

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \\ p_{72} \cdot \pi_7 = \pi_2 \\ p_{23} \cdot \pi_2 + p_{73} \cdot \pi_7 = \pi_3 \\ p_{34} \cdot \pi_3 + p_{64} \cdot \pi_6 = \pi_4 \\ p_{35} \cdot \pi_3 = \pi_5 \\ p_{46} \cdot \pi_4 + p_{56} \cdot \pi_5 = \pi_6 \\ p_{17} \cdot \pi_1 + p_{37} \cdot \pi_3 = \pi_7 \end{array} \right. \quad (9)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (9) otrzymano wartości prawdopodobieństw granicznych  $\pi_i$  włożonego w proces łańcucha Markowa:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \left( \frac{1 - a \cdot p_{37}}{p_{17}} \right) \cdot \pi_7 \\ \pi_2 &= p_{72} \cdot \pi_7 \\ \pi_3 &= a \cdot \pi_7 \\ \pi_4 &= a \cdot (p_{34} + b \cdot p_{64}) \cdot \pi_7 \\ \pi_5 &= a \cdot p_{35} \cdot \pi_7 \\ \pi_6 &= ab \cdot \pi_7 \\ \pi_7 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{p_{17}} + p_{72} + a \left[ 1 + p_{34} + p_{35} - \frac{p_{37}}{p_{17}} + b(1 + p_{64}) \right]} \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$a = p_{23}p_{72} + p_{73} \quad (11)$$

$$b = \frac{p_{46}p_{34} + p_{56}p_{35}}{1 - p_{46}p_{64}} \quad (12)$$

Następnie dla danych uzyskanych z badań rzeczywistego procesu eksploatacji wyznaczono wartości macierzy  $P$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7257 & 0 & 0 & 0,0048 & 0,0314 & 0 & 0,2381 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,9143 & 0 & 0 & 0,0857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7619 & 0,2381 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz wyznaczono wartość prawdopodobieństw granicznych  $\pi_i$  dla łańcucha Markowa. Wyniki zamieszczono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości prawdopodobieństw granicznych  $\pi_i$  dla łańcucha Markowa  
Table 2. Limit probability values  $\pi_i$  for the Markov chain

| $\pi_1$  | $\pi_2$  | $\pi_3$  | $\pi_4$  | $\pi_5$  | $\pi_6$  | $\pi_7$  |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,211864 | 0,211864 | 0,278072 | 0,002119 | 0,008739 | 0,009269 | 0,278072 |

#### 4.2. Wyznaczenie prawdopodobieństw granicznych procesu Markowa X(t)

Na podstawie grafu skierowanego odwzorowania procesu eksploatacji zbudowano macierz  $\Lambda$  intensywności zmian stanów procesu Markowa X(t).

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{17} \\ 0 & -\lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & -\lambda_{33} & \lambda_{34} & \lambda_{35} & 0 & \lambda_{37} \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & -\lambda_{44} & 0 & \lambda_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{55} & \lambda_{56} & 0 \\ \lambda_{61} & 0 & 0 & \lambda_{64} & 0 & -\lambda_{66} & 0 \\ 0 & \lambda_{72} & \lambda_{73} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{77} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie:

$\lambda_{ii}$  – intensywność wyjścia ze stanu  $S_i$  procesu  $X(t)$ , według wzoru

$$\lambda_{ii} = \frac{1}{T_i} \quad (14)$$

$T_i$  – średni czas przebywania w  $i$ -tym stanie procesu  $X(t)$

$\lambda_{ij}$  – intensywność przejścia ze stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$  procesu  $X(t)$ , według wzoru:

$$\lambda_{ij} = p_{ij} \cdot \lambda_i \quad (15)$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*$ ,  $i=1,2,\dots,7$  dla procesu Markowa  $X(t)$  został zbudowany układ równań

$$A^T \cdot P^* = 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{11} & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{41} & 0 & \lambda_{61} & 0 \\ 0 & -\lambda_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{72} \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{73} \\ 0 & 0 & \lambda_{34} & -\lambda_{44} & 0 & \lambda_{64} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{35} & 0 & -\lambda_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{46} & \lambda_{56} & -\lambda_{66} & 0 \\ \lambda_{17} & 0 & \lambda_{37} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \\ p_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Następnie układ równań (17) został zastąpiony układem równań liniowych

$$\sum_{i=1}^7 \lambda_{ij} \cdot p_i^* = 0, j = 1, 2, \dots, 7 \quad (18)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{11} \cdot p_1^* + \lambda_{31} \cdot p_3^* + \lambda_{41} \cdot p_4^* + \lambda_{61} \cdot p_6^* = 0 \\ -\lambda_{22} \cdot p_2^* + \lambda_{72} \cdot p_7^* = 0 \\ \lambda_{23} \cdot p_2^* - \lambda_{33} \cdot p_3^* + \lambda_{73} \cdot p_7^* = 0 \\ \lambda_{34} \cdot p_3^* - \lambda_{44} \cdot p_4^* + \lambda_{64} \cdot p_6^* = 0 \\ \lambda_{35} \cdot p_3^* - \lambda_{55} \cdot p_5^* = 0 \\ \lambda_{46} \cdot p_4^* + \lambda_{56} \cdot p_5^* - \lambda_{66} \cdot p_6^* = 0 \\ \lambda_{17} \cdot p_1^* + \lambda_{37} \cdot p_3^* - \lambda_{77} \cdot p_7^* = 0 \end{cases} \quad (19)$$

W celu rozwiązania układu równań (19) jedno z równań układu, równanie pierwsze zostało zastąpione warunkiem normalizacyjnym postaci

$$\sum_{i=1}^7 p_i^* = 1 \quad (20)$$

Wówczas układ równań liniowych (19) przedstawiono poniżej

$$\begin{cases} p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* + p_7^* = 1 \\ -\lambda_{22} \cdot p_2^* + \lambda_{72} \cdot p_7^* = 0 \\ \lambda_{23} \cdot p_2^* - \lambda_{33} \cdot p_3^* + \lambda_{73} \cdot p_7^* = 0 \\ \lambda_{34} \cdot p_3^* - \lambda_{44} \cdot p_4^* + \lambda_{64} \cdot p_6^* = 0 \\ \lambda_{35} \cdot p_3^* - \lambda_{55} \cdot p_5^* = 0 \\ \lambda_{46} \cdot p_4^* + \lambda_{56} \cdot p_5^* - \lambda_{66} \cdot p_6^* = 0 \\ \lambda_{17} \cdot p_1^* + \lambda_{37} \cdot p_3^* - \lambda_{77} \cdot p_7^* = 0 \end{cases} \quad (21)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (21) otrzymano wzory opisujące prawdopodobieństwa graniczne  $p_i^*$  dla procesu Markowa  $X(t)$

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{\lambda_{77} - \lambda_{37}c}{\lambda_{17}} p_7^* \\ p_2^* &= \frac{\lambda_{72}}{\lambda_{22}} p_7^* \\ p_3^* &= c \cdot p_7^* \\ p_4^* &= \frac{(\lambda_{34} + \lambda_{64}d)c}{\lambda_{44}} p_7^* \\ p_5^* &= \frac{\lambda_{35}}{\lambda_{55}} c p_7^* \\ p_6^* &= c d p_7^* \\ p_7^* &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{72}}{\lambda_{17}} + \frac{\lambda_{72}}{\lambda_{22}} + c \left[ 1 + \frac{\lambda_{34} + \lambda_{35}}{\lambda_{44} + \lambda_{55}} - \frac{\lambda_{37} + d \left( 1 + \frac{\lambda_{64}}{\lambda_{44}} \right)}{\lambda_{17}} \right]} \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$$c = \frac{\lambda_{23} \frac{\lambda_{72}}{\lambda_{22}} + \lambda_{73}}{\lambda_{33}} \quad (23)$$

$$d = \frac{\lambda_{46} \lambda_{34} + \lambda_{56} \lambda_{44} \frac{\lambda_{35}}{\lambda_{55}}}{\lambda_{66} \lambda_{44} - \lambda_{64} \lambda_{46}} \quad (24)$$

Następnie na podstawie danych eksploatacyjnych uzyskanych z badań rzeczywistego procesu eksploatacji ciągników rolniczych przedstawionych w tabeli 3 wyznaczono wartość prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*$  dla procesu Markowa  $X(t)$ . Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 3. Wartości średnich czasów przebywania obiektów technicznych w poszczególnych stanach analizowanego procesu eksploatacji w [h]

Table 3. Limit values of residence times of technical facilities in particular states of the analyzed operation process in [h]

| T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> | T <sub>6</sub> | T <sub>7</sub> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 14,3           | 0,5            | 6,0            | 8,0            | 1,5            | 32,0           | 0,75           |

Tabela 4. Wartości prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*$  dla procesu Markowa  $X(t)$

Table 4. Limit probability values  $p_i^*$  for the Markov process  $X(t)$

| $p_1^*$  | $p_2^*$ | $p_3^*$  | $p_4^*$  | $p_5^*$  | $p_6^*$  | $p_7^*$  |
|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,567432 | 0,01984 | 0,312484 | 0,003174 | 0,002455 | 0,055553 | 0,039061 |

## 5. WNIOSKI

Zbudowanie modelu zdarzeniowego oraz modelu matematycznego z zastosowaniem procesów Markowa umożliwiło przeprowadzenie analizy realizacji poszczególnych procesów eksploatacji w systemie użytkowania ciągników rolniczych. Największą wartość prawdopodobieństw granicznych  $\pi_i$  wyznaczonych dla łańcucha Markowa (wejścia do poszczególnych stanów procesu) otrzymano dla stanu  $S_3$  – użytkowanie (0,278072),  $S_7$  – zmiana osprzętu (0,278072),  $S_1$  – postój obiektu technicznego (0,211864) oraz  $S_2$  – realizacja obsługi w dniu użytkowania (0,211864). Na tej podstawie można stwierdzić, że badane ciągniki rolnicze najczęściej wchodzi do stanów eksploatacyjnych związanych bezpośrednio z realizacją zadania. Jednocześnie prawdopodobieństwo wejścia badanych obiektów technicznych do stanów niezdatności jest niewielkie i wynosi 0,020127.

W przypadku analizy wartości prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*$  wyznaczonych dla procesu Markowa można zauważyć, że największe prawdopodobieństwo przebywania obiektów technicznych dotyczy stanów  $S_1$  – postój obiektu technicznego (0,567432) oraz  $S_3$  – użytkowanie (0,312484). Zakładając, że stany  $S_2$  – realizacja obsługi w dniu użytkowania oraz  $S_7$  – zmiana osprzętu, są stanami zdatności obiektu technicznego, wówczas prawdopodobieństwo przebywania obiektu technicznego w stanach zdatności ( $S_1, S_2, S_3, S_7$ ) wynosi 0,938817. Jednocześnie można zauważyć, że prawdopodobieństwo przebywania obiektu technicznego w stanach niezdatności:  $S_4$  – realizacja obsługi technicznej,  $S_5$  – diagnozowanie,  $S_6$  – naprawa, wynosi 0,061182. Opracowanie markowskiego modelu stanowi pierwszy etap budowy matematycznego modelu procesu eksploatacji ciągników rolniczych. W modelu markowskim przyjęto uproszczone założenie,

że zmienne losowe opisujące czasy przebywania w stanach modelowanego procesu mają rozkład wykładniczy. Kolejnym krokiem będzie opracowanie semi-markowskiego modelu procesu, w którym czasy przebywania w poszczególnych stanach procesu będą opisane dowolnymi rozkładami. Tak opracowany model procesu eksploatacji ciągników rolniczych będzie zastosowany do oceny efektywności działania systemu eksploatacji np. oceny gotowości systemu do realizacji przydzielonych zadań.

## 6. LITERATURA

- [1] GRABSKI F., JAŻWIŃSKI J.: Niektóre Problemy Modelowania Systemów Transportowych, Monografia. ITE. Biblioteka Problemów Eksploatacji. Warszawa – Radom, 2003.
- [2] GRABSKI F., JAŻWIŃSKI J.: Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki, 2009.
- [3] IOSIFESCU M.: Skończone procesy Markowa, PWN Warszawa, 1988.
- [4] KNOPIK L., MIGAWA K.: Multi-state model of maintenance policy Wielostanowy model decyzji eksploatacyjnych. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 20(1), 2018, 125-130.
- [5] STASZAK Ż., GRZEŚ Z., RYBACKI P.: A method of comparative studies on checkup sets to evaluate the technical condition of tractors Metoda badań porównawczych zbiorów sprawdzeń do oceny stanu technicznego ciągników. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 20(3), 2018, 450-454.
- [6] WOROPAY M.: Podstawy racjonalnej eksploatacji maszyn. ATR Bydgoszcz, 1996.
- [7] WOROPAY M., SZUBARTOWSKI M., MIGAWA K.: Model oceny i kształtowania gotowości operacyjnej podsystemu wykonawczego w systemie transportowym. Wydawnictwo i Zakład Poligrafii Instytutu Technologii Eksploatacji, Radom 2003.

## MARKOV MODEL OF THE OPERATION AND MAINTENANCE PROCESS OF FARM TRACTORS

**Summary:** An effective and rational analysis of complex processes of technical object operation and maintenance requires the use of various types of modeling methods, including mathematical and simulation models. In this paper, in order to describe the actual process of farm tractor operation and maintenance, an event model of the operation and maintenance process was developed, and then a mathematical model of this process was built using the theory of Markov processes. On the basis of the obtained results, the considered operation and maintenance process was analyzed.

**Key words:** operation and maintenance process, Markov processes, farm tractors.